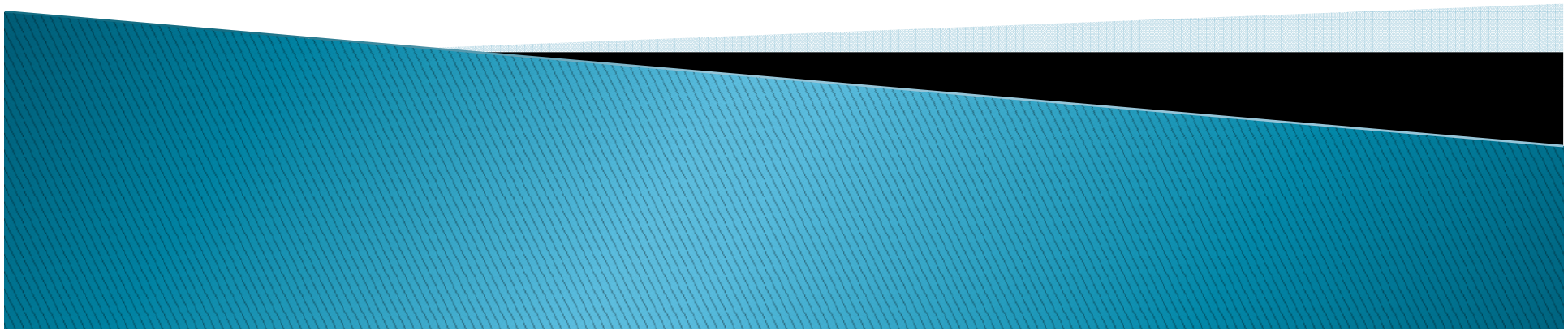
Chapitre 3 : Analyse temporelle des systèmes fondamentaux

Table des matières

1. Introduction
2. Définitions
3. Critères de performance
4. Indices de performance
5. Réponses temporelles d'un système du premier ordre
6. Réponses temporelles d'un système du second ordre



1. Introduction

- Les systèmes étudiés sont **l**inéaires, **s**tationnaires, **c**ausals et initialement au **r**epos (***lscr***) qui sont définis par un modèle liant l'entrée et la sortie.

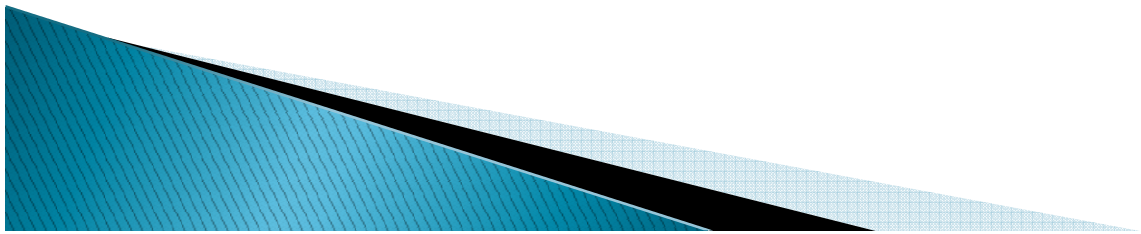
- Ces systèmes sont décrits soit par des équations différentielles ou bien par des fonctions de transfert.

- L'analyse temporelle est basée sur la réponse temporelle du système. Elle consiste essentiellement à :

  - Comprendre l'évolution du signal de sortie ***y(t)*** en fonction des sollicitations de l'entrée ***u(t)***.

  - Comparer les évolutions des sorties de différents systèmes.

  - Comparer les comportements des systèmes en termes de stabilité, de rapidité et de précision.



2. Définitions

Soit un système dynamique dont la fonction de transfert ***H(p)*** est donnée par :

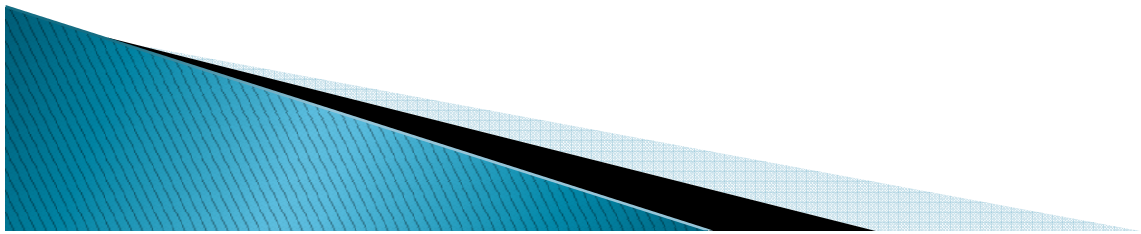
1.1. Pôles et zéros :

- Les **pôles** de ***H(p)*** sont les ***n*** valeurs de ***p*** qui annulent le dénominateur de ***H(p)***. Les pôles sont notés $p_i=1,2,..,n$.
- Les ***zéros*** de ***H(p)*** sont les ***m*** valeurs de ***p*** qui annulent le numérateur de ***H(p)***. Les zéros sont notés $z_i=1,2,..,m$.
- Les pôles et les zéros peuvent être réels ou complexes. S'ils sont complexes, ils apparaissent en paires conjuguées.

2.2. Ordre

Il existe plusieurs définitions équivalentes pour définir l'**ordre** d'un système:

- L'ordre d'un système est le nombre minimal d'équations différentielles temporelles du premier ordre nécessaires pour décrire le comportement du système; une équation d'ordre ***n*** peut se réduire sous la forme de ***n*** équations du premier ordre.
- L'ordre d'un système est le nombre de variables d'état (variables dépendantes) nécessaires pour décrire la dynamique du système.
- L'ordre d'un système est le degré du polynôme en ***p*** du dénominateur de la fonction de transfert décrivant ce système après, le cas échéant, élimination des facteurs communs au numérateur et au dénominateur.
- L'ordre d'un système correspond au nombre de pôles de la fonction de transfert.



2.3. Gain statique

Le **gain statique *K*** est défini comme la valeur de $H(p)$ pour $p=0$:

Pour un système stable ( ),
le gain statique est le rapport entre l'amplitude de la réponse et l'amplitude de l'excitation après disparition des phénomènes transitoires, c'est-à-dire en régime stationnaire (permanent) :

Remarque

Il est parfois utile de définir d'autres gains statiques comme :

- **Gain en vitesse**
- **Gain en accélération**

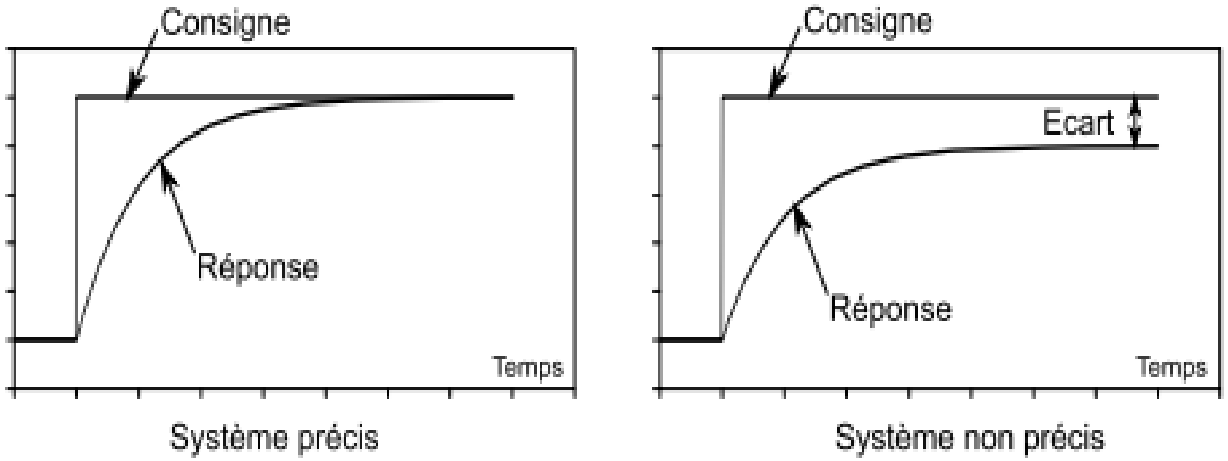
3. Critères de performance

Le comportement d'un système est évalué suivant différents critères de performance : précision, rapidité, amortissement et stabilité.

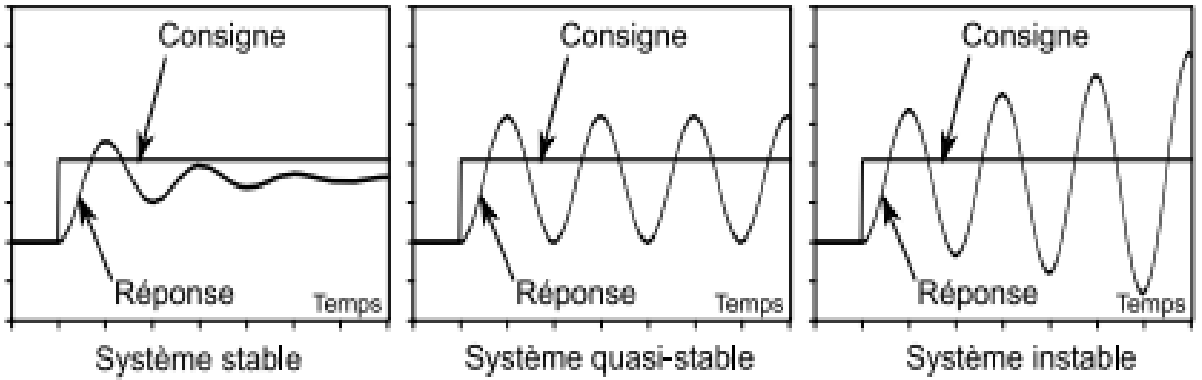
3.1. En régime permanent

Le régime permanent correspond au moment où le signal de sortie est établi.

Précision

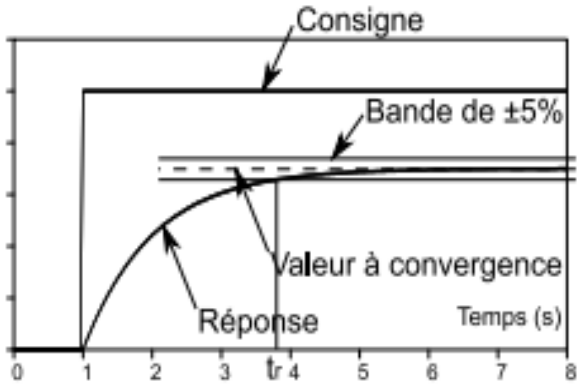


Stabilité

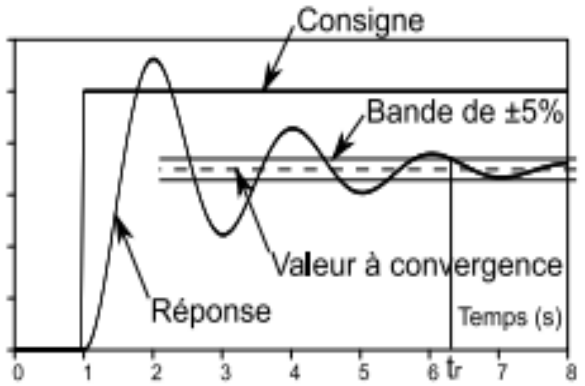


3.2. En régime transitoire

Rapidité

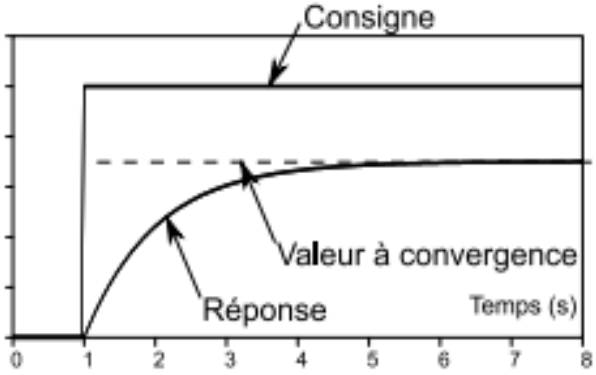


Temps de réponse de 3,8 s

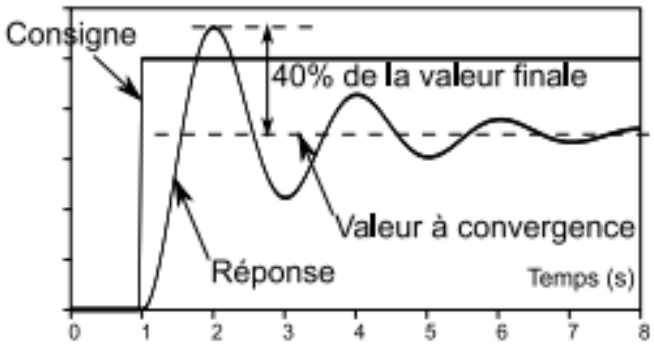


Temps de réponse de 6,3 s

Dépassement



Réponse sans dépassement

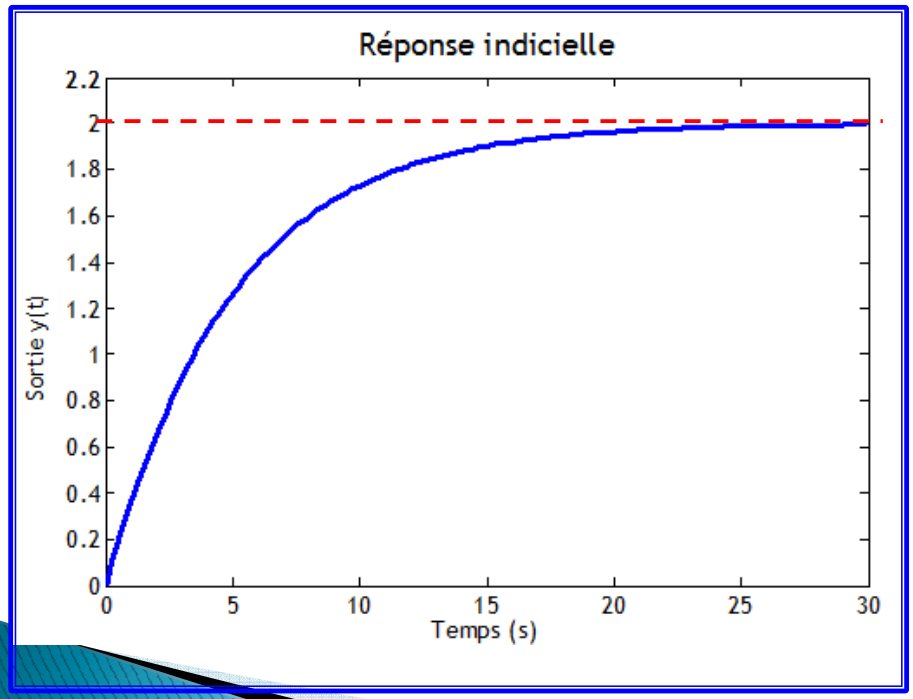


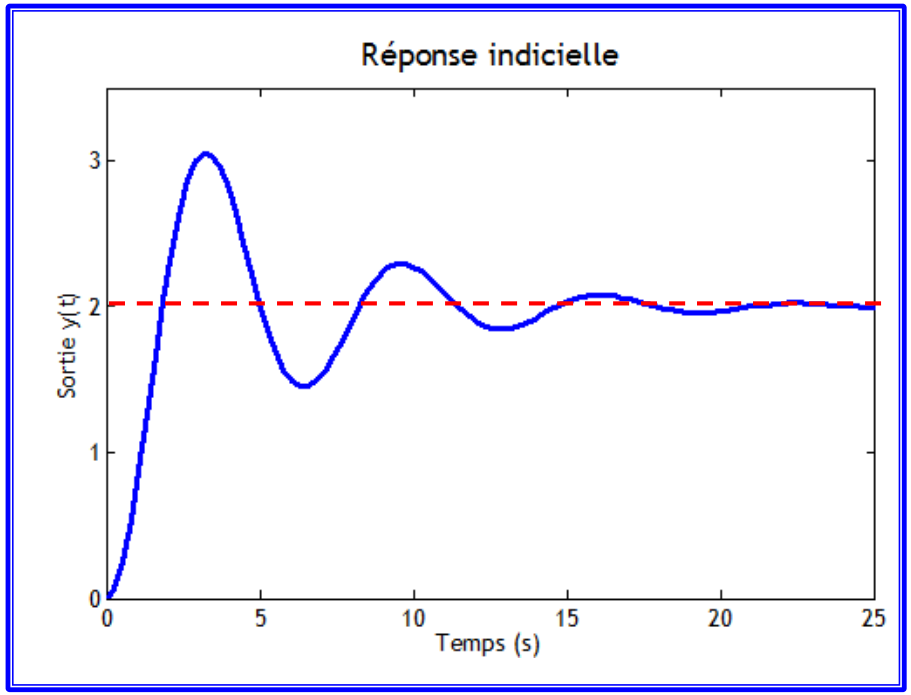
Réponse avec dépassement de 40%

4. Indices de performance

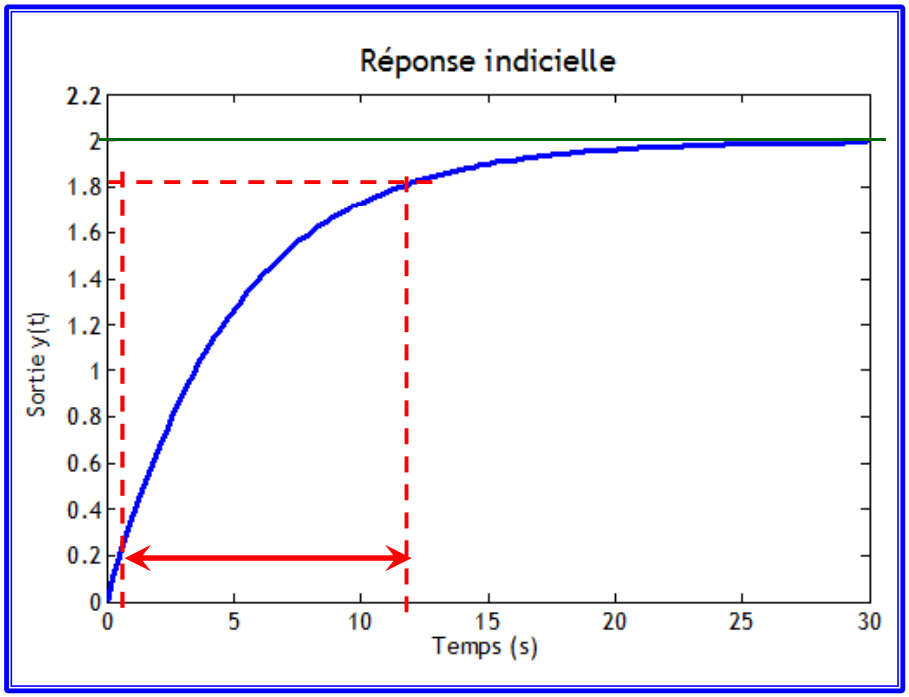
La réponse à un échelon est caractérisée par un certain nombre de paramètres appelés indices de performance; à savoir temps de montée, temps de réponse, valeur finale, dépassement maximal, etc.

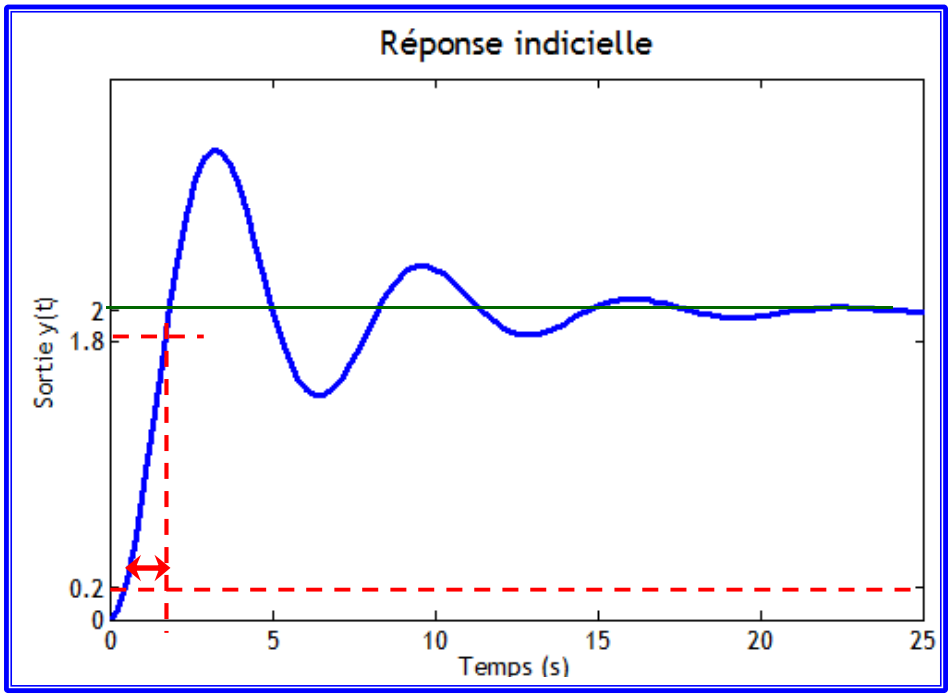
4.1. Valeur finale V_f



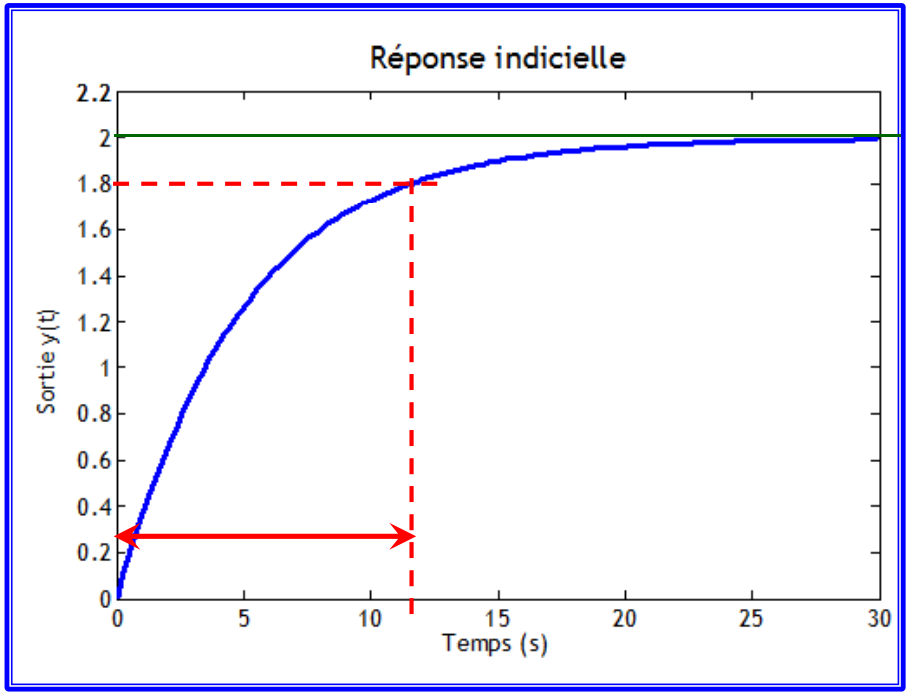


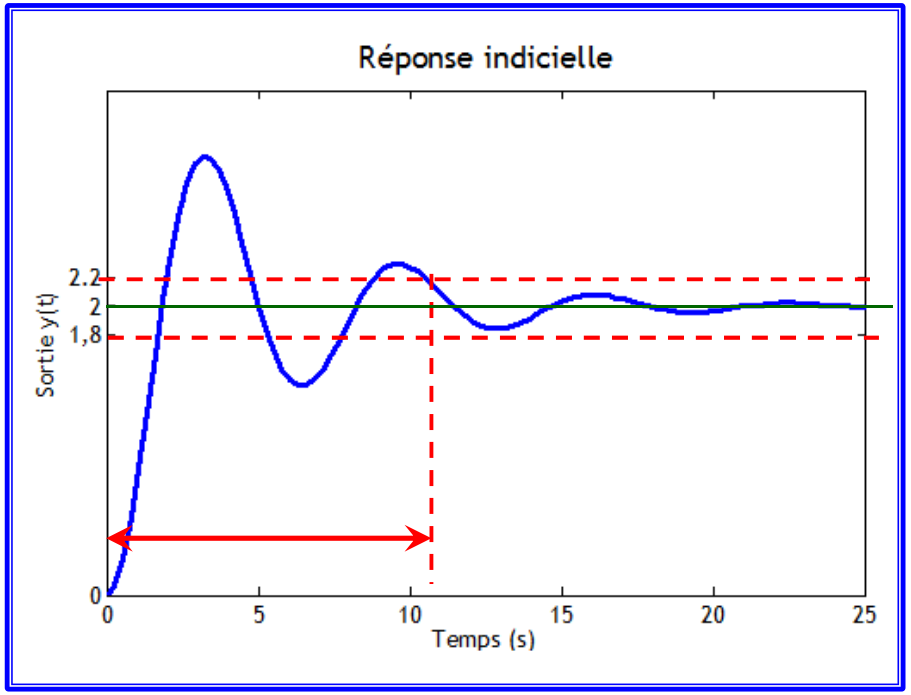
4.2. Temps de montée T_m



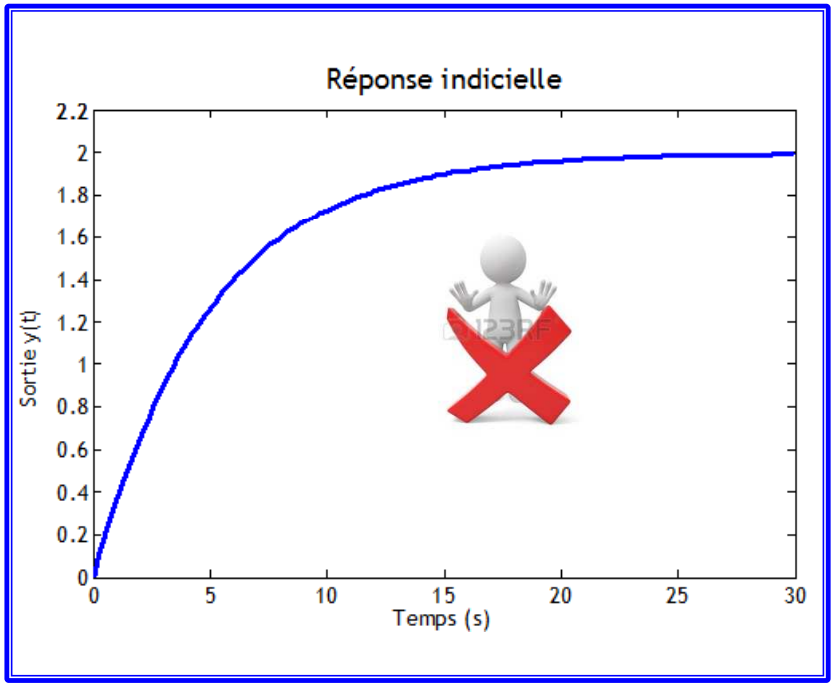


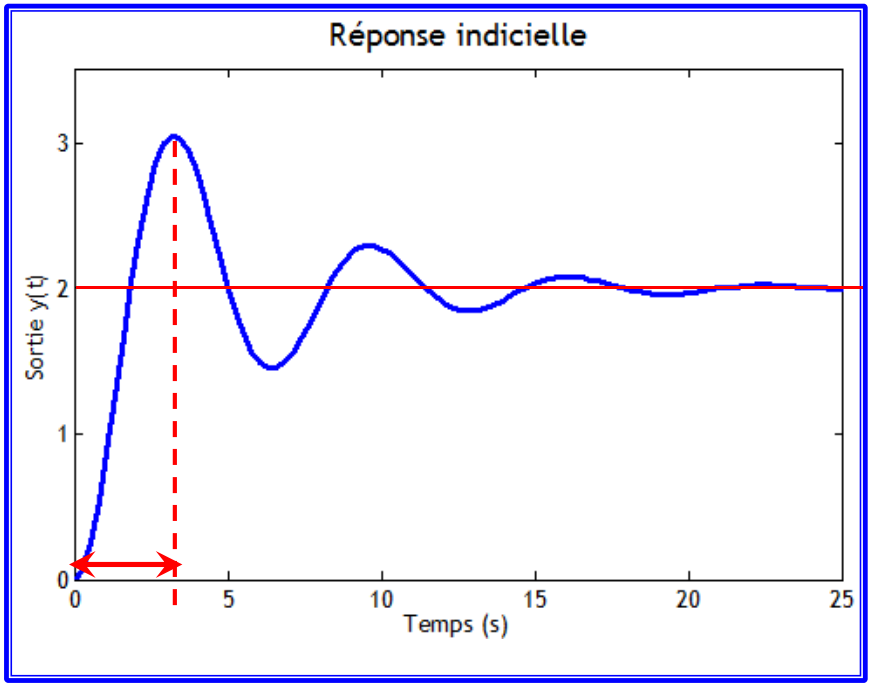
4.3. Temps de réponse T_r



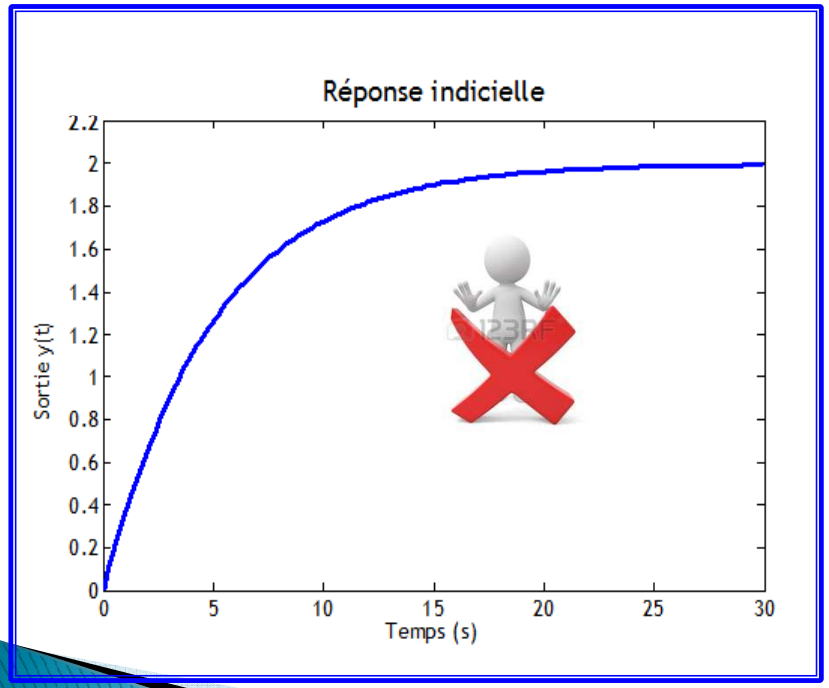


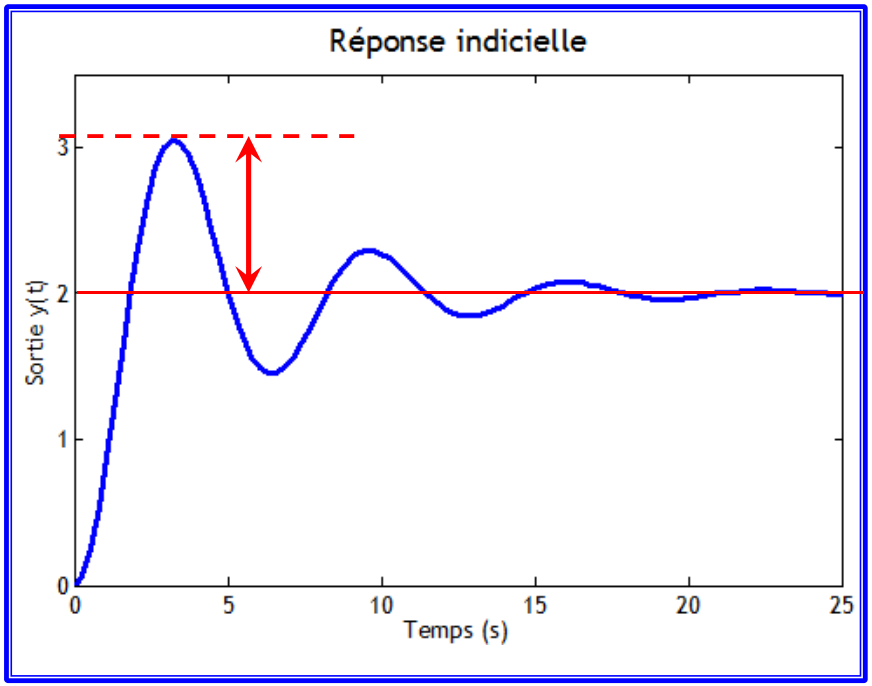
4.4. Temps de premier pic T_{pic}





4.5. Valeur du premier pic D (Dépassement)





5. Réponses temporelles d'un système du premier ordre

5.1. Définition

Équation temporelle

Le comportement d'un système du premier ordre est caractérisé par une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants :

On appelle :

L'appellation "gain statique" est justifiée par le comportement statique du système : si les entrée et sortie sont constantes, l'équation différentielle devient :

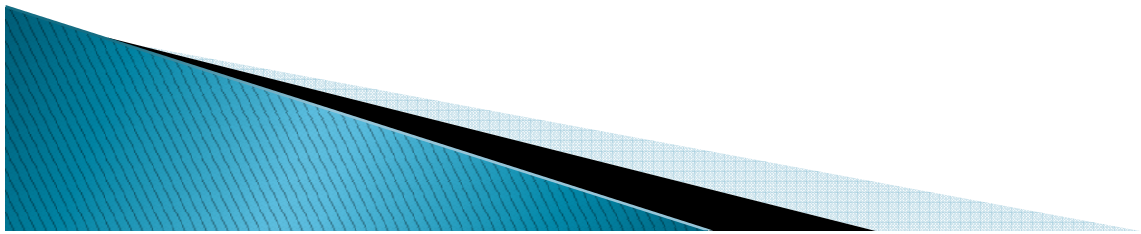
$$y+0 = K.u$$, d'où en statique : $$K = y/u$$.

Fonction de transfert

La transformée de Laplace conduit lorsque les conditions initiales sont toutes nulles à :

Cette forme de la fonction de transfert est appelée forme canonique (la constante du polynôme du dénominateur vaut 1).

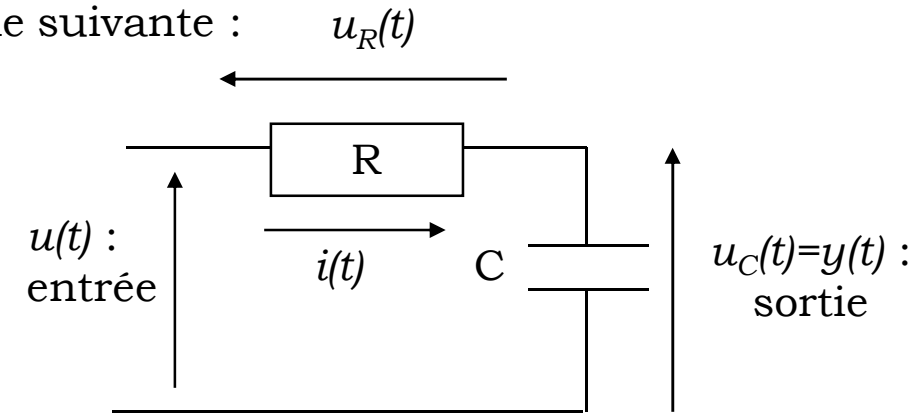
- La fonction de transfert d'un système du premier ordre possède donc au maximum un pôle et un zéro.
- Les systèmes du premier ordre sont très répandus à l'échelle industrielle, et, en général, ils ne possèdent pas de zéro.



5.2. Exemple : Circuit RC

Le système est régit par l'équation différentielle suivante :

En appliquant la transformée de Laplace,



ou encore :

Or la sortie est :

En remplaçant *I(p)* par *CpU(p)* et en isolant le quotient sortie/entrée, la fonction de transfert devient :

5.3. Réponse à une impulsion (*réponse impulsionnelle)*

La réponse impulsionnelle d'un système est sa réponse quand une impulsion d'amplitude ***A*** est appliquée à son entrée : $u(t)=A.\delta(t)$, avec $\delta(t)$ étant l'impulsion de Dirac. Elle caractérise aussi l'identité du système.

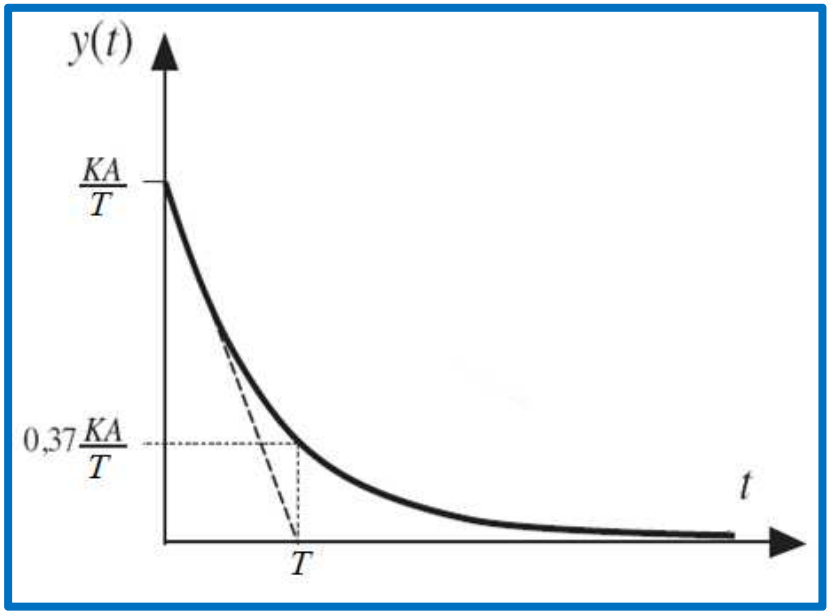


- La sortie du système s'écrit :

- En appliquant la transformée de Laplace inverse, on obtient :

Remarque : *il est possible d'identifier les deux paramètres (**K** et **T**) de la fonction de transfert d'un système du premier ordre à partir de la courbe de sa réponse impulsionnelle.*

- L'allure de cette réponse est représentée par la figure suivante :



  - ***Point de départ :*** *(théorème de le valeur initiale)*
  - ***Point d'arrivée :*** *(théorème de le valeur finale)*

- Les points particuliers de cette réponse sont donnés dans le tableau ci-dessous :

T	**0**	***T***	***3T***	**+∞**
y(t)	*(A.K)/T*	*0.37(A.K)/T*	*0.05(A.K)/T*	0
dy(t)/dt	*-(A.K)/T²*	*-0.37(A.K)/T²*	*-0.05(A.K)/T²*	0

Remarque : *La tangente à l'origine coupe l'axe des abscisses à t =* ***T*** *(la pente de la tangente à l'origine vaut : -K.A/T²).*

5.4. Réponse à un échelon (*réponse indicielle*)

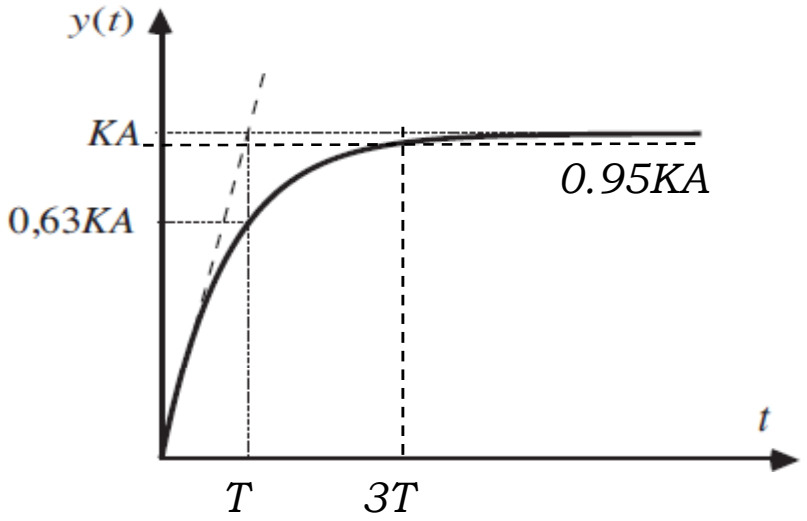
La réponse indicielle d'un système est sa réponse quand une entrée ***u(t)*** en échelon d'amplitude ***A*** est appliquée à son entrée ***u(t)=A.ε(t)***, avec ***ε(t)*** étant l'échelon unitaire . Dans ce cas-là :

⇨

Nous avons, donc, deux pôles (***p=0*** et ***p=-1/T***), alors ***Y(p)*** s'écrit :

La réponse indicielle temporelle est déduite par la transformée de Laplace inverse :

- La figure suivante représente l'évolution de la réponse indicielle.



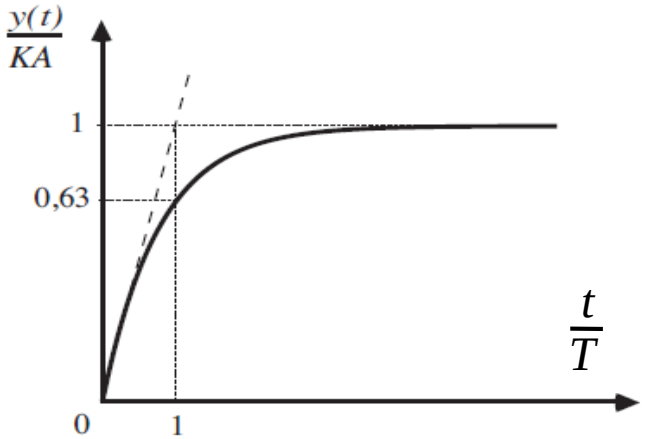
- La valeur de la réponse pour $t=T$ est :

- La valeur de la réponse pour $t=3T$ est :

Indices de performances

La variable ***T*** constitue donc une mesure de la rapidité de la réponse. Pour cette raison, cette grandeur est appelée la du système et elle s'exprime en unités de temps.

- On peut représenter aussi la réponse indicielle normalisée, c'est-à-dire ***y(t)/KA*** en fonction de ***t/T*** comme indiquée par la figure suivante :



Réponse indicielle normalisée d'un système du premier ordre.

Remarque

la réponse impulsionnelle peut être obtenue par simple dérivation de la réponse indicielle. En effet, on a :

- **Réponse indicielle :** $y_\varepsilon(t) = K.A\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$

$$\frac{dy_\varepsilon(t)}{dt}$$

- **Réponse impulsionnelle :** $y_\delta(t) = \frac{K.A}{T} e^{-\frac{t}{T}}$

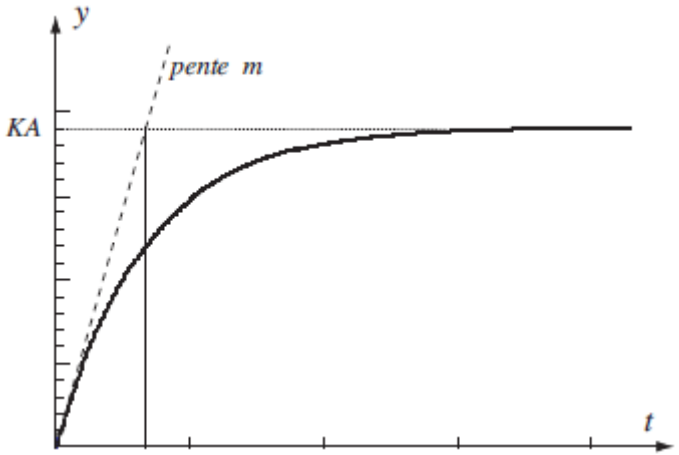
Identification du système à partir de la réponse indicielle

Si la réponse indicielle d'un système du premier ordre est mesurée, il est possible de déterminer le gain statique ***K*** et la constante de temps ***T***.

- **Détermination de *K* :** Le gain statique est obtenu en divisant l'amplitude maximale ***K.A*** de la réponse par le facteur ***A*** (amplitude connue de l'échelon indiciel appliqué à l'entrée du système).

- **Détermination de *T* :** On peut utiliser l'une des deux méthodes suivantes :

  - **Méthode 1 :** La constante de temps correspond à l'instant ou l'amplitude de cette réponse atteint le ***63%*** de sa valeur finale.
  - **Méthode 2 :** On évalue la pente ***m*** de la tangente de la réponse indicielle à l'instant d'application de l'échelon. Elle vaut :



5.5. Réponse à une rampe

Supposons que le système du premier ordre soit excité par un signal de type rampe : ***u(t)= A.r(t)=A.t.ε(t).***

- La transformée de Laplace de ce signal d'entrée est :

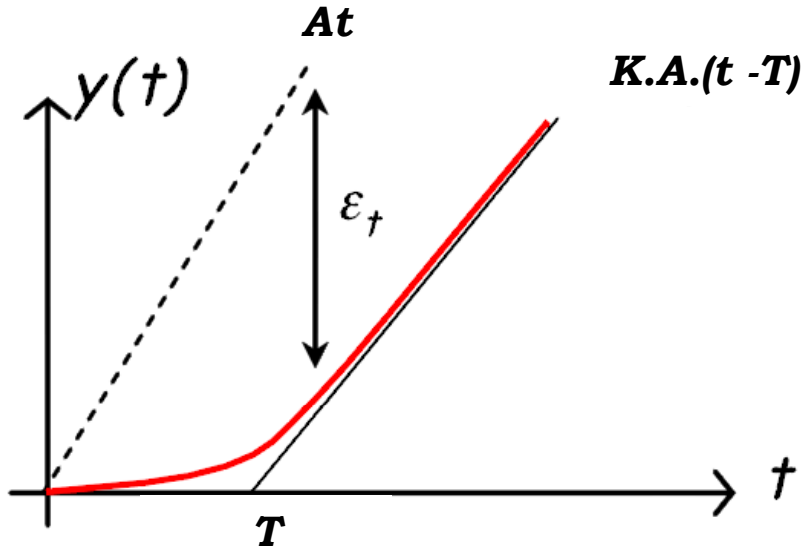
- La sortie du système a pour expression :



- Le signal temporel correspondant s''ecrit (par recours à la transformée de Laplace inverse :

Remarques

- La réponse est la somme de deux termes : une fonction exponentielle décroissante et une rampe retardée, de retard *T*.
- Le terme $KATe^{-\frac{t}{T}} \approx 0$ au bout de $3T$ $\Rightarrow$ la sortie tend asymptotiquement vers *KA(t-T)*.
- La pente à l'origine est nulle



La figure suivante donne la réponse a une rampe d'un système du premier Ordre.

Observations :